

滚动轴承振动性能状态演变的非线性特征和不确定性特征的灰关系分析

叶 亮¹, 邓四二^{1,2,3}, 崔永存¹, 张文虎¹, 庞晓旭¹

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003;

2. 辽宁重大装备制造协同创新中心, 辽宁 大连 116024;

3. 河南科技大学 高端轴承摩擦学技术与应用国家地方联合工程实验室, 河南 洛阳 471023)

摘 要: 为了更加全面有效地监测滚动轴承服役过程中其振动性能状态的演变历程,用关联维数和盒维数表征振动性能状态演变的非线性,用振动数据瞬时值的波动范围和平均值的波动范围表征振动性能状态演变的不确定性。运用灰关系分析法求解参数序列之间的灰置信水平,进而分析轴承振动性能状态演变的非线性特征和不确定性特征之间的非线性相关程度。两个案例表明:总体上来看,关联维数和盒维数均有减小的趋势,瞬时值的波动范围和平均值的波动范围都有增大的趋势,而且它们在突变点处有某种意义上的对应关系。非线性特征参数序列和不确定性特征参数序列总体上有负相关关系,且不确定性参数序列与关联维数的灰置信水平平均比其与盒维数的灰置信水平要高。

关 键 词: 滚动轴承; 性能状态演变; 非线性; 不确定性; 关联维数; 盒维数; 瞬时值的波动范围; 平均值的波动范围

中图分类号: V216.3; TH133.33

文献标志码: A

Grey relation analysis on nonlinear characteristics and uncertainty characteristics of evolution of rolling bearing vibration performance state

YE Liang¹, DENG Sier^{1,2,3}, CUI Yongcun¹,

ZHANG Wenhui¹, PANG Xiaoxu¹

(1. School of Mechatronics Engineering,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;

2. Collaborative Innovation Center of Major Machine Manufacturing in Liaoning,

Dalian Liaoning 116024, China;

3. National United Engineering Laboratory for Advanced Bearing Tribology,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471023, China)

Abstract: In order to more comprehensively and effectively monitor the evolution process of vibration performance state of rolling bearing in service, the nonlinear and uncertainty features

收稿日期:2021-12-01

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(51905152);河南省重点研发与推广专项(科技攻关)(202102210083)

作者简介:叶亮(1990—),男,博士,主要研究方向为滚动轴承性能分析与数据处理。

通信作者:邓四二(1963—),男,教授、博士生导师,博士,主要研究方向为滚动轴承设计与仿真分析。E-mail:dse@haust.edu.cn

引用格式:叶亮,邓四二,崔永存,等.滚动轴承振动性能状态演变的非线性特征和不确定性特征的灰关系分析[J].航空动力学报,2022,37(6):1121-1133. YE Liang, DENG Sier, CUI Yongcun, et al. Grey relation analysis on nonlinear characteristics and uncertainty characteristics of evolution of rolling bearing vibration performance state[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(6):1121-1133.

of evolution of vibration performance state were characterized by correlation dimension and box dimension, the fluctuation ranges of instantaneous value and average value of vibration data. The grey confidence level between the parameter sequences was solved by using the grey relation analysis method, so as to analyze the nonlinear correlation degree between the nonlinear and uncertain characteristics of the evolution of the bearing vibration performance state. Two cases showed that the correlation dimension and box dimension had a trend of decrease, and the fluctuation ranges of instantaneous value and average value had a trend of increase on the whole. Moreover, they had corresponding relationships at the discontinuity points in a sense. There were negative correlation relationships among nonlinear parameters and uncertain parameters. Besides, the grey confidence levels between sequences of uncertain parameters and correlation dimension were higher than the uncertainty parameters and box dimension.

Key words: rolling bearing; evolution of performance state; nonlinear; uncertainty; correlation dimension; box dimension; fluctuation ranges of instantaneous value; fluctuation ranges of average value

随着精密制造仪器、风电能源、航空航天等信息的更新,滚动轴承性能变异的许多异常现象不断出现。例如,振动与噪声、摩擦力矩、零件断裂、密封性、运动精度、卡死、烧结等,这些性能的变化规律与失效概率分布呈现出不确定性、非线性、多变性、多样性、非平稳性特征^[1-5]。滚动轴承在服役过程中其振动性能和服役精度的概率分布和失效轨迹等信息的变化,会导致振动性能及其可靠性的变化规律呈现出非线性、非平稳性、不确定性和多变性等特征。由此可知,挖掘轴承服役状态及其可靠性的非线性演变轨迹,寻求轴承振动性能状态演变的非线性和不确定性,是机械基础件产品与机械传动系统的性能状态监测、评估与预测领域的共性科学问题。

轴承振动性能状态演变过程中采集的性能数据,可以看作一个随时间变化而变化的时间序列。在时间序列分析中,虽然混沌理论中计算嵌入维数和时间延迟的方法很多,但是不同的计算方法会有不同的结果,因为它们的设定准则和求解方程不尽相同^[6-9]。这并不表示某种方法比其他方法好,只不过对于某一个混沌时间序列或某种条件和状况,该方法更适用。换句话说,这些方法有一些特定的适用条件,它们均有各自的优势。混沌理论中的关联维数和盒维数,广泛应用于滚动轴承性能特征提取和分析。例如,夏新涛等^[10]分别运用关联维数的均值和标准差表征轴承摩擦力矩性能的非线性特征和不确定性演变历程;孟凡念^[11]计算轴承摩擦力矩性能的非线性参变量——关联维数和盒维数,研究结果表明这两个参数均

随轴承转速增大而增大;基于变分模态分解法,张淑清等^[12]通过分析待测信号和各样本信号的广义分形维数矩阵的相关系数,对滚动轴承进行故障诊断;张美芸等^[13]采用信息维数和盒维数刻画滚动轴承的故障特征,研究发现轴承在故障状态下的信息维数与盒维数均比正常状态下小。因此,本文用关联维数和盒维数计算轴承振动序列的非线性特征。

振动瞬时值的波动范围,与经典统计理论中的静态不确定度有所不同,它是一种随时间变化而变化的动态的扩展不确定度^[14-16]。振动平均值的波动范围,可以用来评价滚动轴承振动性能状态的规律性波动。因此,综合运用这两个指标可以动静结合地表征轴承服役状态演变的不确定性。

目前,在非线性和不确定性领域均有大量的研究成果。然而,轴承服役态演变的非线性特征与不确定性特征之间的关联程度,现有研究成果很少涉及。鉴于此,本文分别用关联维数和盒维数、振动序列的瞬时值波动范围和平均值波动范围表征轴承振动性能的非线性特征和不确定性特征。通过融合互信息法^[6]、Grassberger-Procaccia算法^[7]、灰自助法^[17]、自助法^[18]、最大熵法^[19]和灰关系分析法^[20-21],分别计算各个振动序列的最优时间延迟、关联维数、盒维数、振动瞬时值的波动范围和振动平均值的波动范围。运用灰关系分析法,求解这些参数序列之间的灰置信水平,进而分析轴承振动性能状态演变的非线性特征和不确定性特征之间的非线性相关程度。通过试验研究验证

所建模型的有效性,从而为研究轴承服役周期内的性能不确定性及其可靠性的非线性、非平稳和非统计的演变历程提供些许新思路。

1 数学模型

在滚动轴承服役期间,获得其振动序列向量 X 。

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_w, \dots, X_W); w = 1, 2, \dots, W \quad (1)$$

$$X_w = (x_w(1), x_w(2), \dots, x_w(k), \dots, x_w(K)); \\ k = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

式中 X_w 为轴承的第 w 个振动加速度序列; w 为轴承振动加速度序列号; W 为轴承振动加速度序列的个数; $x_w(k)$ 为轴承第 w 个序列中的第 k 个振动加速度数据; K 为振动加速度数据的个数。

1.1 求解非线性特征参数

用关联维数和盒维数综合表征滚动轴承服役过程中振动性能状态演变的非线性特征。

1.1.1 计算关联维数

首先,运用互信息法计算第 w 个振动序列 X_w 与 $X_{w\tau}$ 的互信息函数 $I(X_w, X_{w\tau})$ 。

$$I(X_w, X_{w\tau}) = E(X_w) + E(X_{w\tau}) - E(X_w, X_{w\tau}) \quad (3)$$

式中 $E(X_w)$ 为第 w 个振动序列 X_w 的信息熵, $E(X_{w\tau})$ 为对第 w 个振动序列延迟了 τ 个单位时间的数据序列(简记为延迟序列) $X_{w\tau}$ 的信息熵; $E(X_w, X_{w\tau})$ 为两个序列的联合熵。

第 w 个振动序列的信息熵定义如下:

$$E(X_w) = - \sum_{k=1}^K P[x_w(k)] \lg \{P[x_w(k)]\} \quad (4)$$

$$E(X_w, X_{w\tau}) = - \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K P[x_w(k), x_{w\tau}(j)] \times \\ \lg \{P[x_w(k), x_{w\tau}(j)]\} \quad (5)$$

式中 $P[x_w(k)]$ 是 $x_w(k)$ 在第 w 个振动序列 X_w 中出现的概率; $P[x_{w\tau}(j)]$ 是 $x_{w\tau}(j)$ 在延迟序列 $X_{w\tau}$ 中出现的概率; $P[x_w(k), x_{w\tau}(j)]$ 是 $x_w(k)$ 和 $x_{w\tau}(j)$ 同时出现在序列 X_w 和 $X_{w\tau}$ 中的概率。

采用等网格法计算 $P[x_w(k)]$ 、 $P[x_{w\tau}(j)]$ 和 $P[x_w(k), x_{w\tau}(j)]$, 具体如下:

$$P[x_w(k)] = \frac{N_x(q_1)}{N_{\text{total}}}; 1 \leq q_1 \leq s_1 \quad (6)$$

$$P[x_{w\tau}(k)] = \frac{N_y(q_2)}{N_{\text{total}}}; 1 \leq q_2 \leq s_2 \quad (7)$$

$$P[x_w(k), x_{w\tau}(k)] = \frac{N(q_1, q_2)}{N_{\text{total}}} \quad (8)$$

式中 $N_x(q_1)$ 为 x 方向上的第 q_1 个格子中的数据个数, $N_y(q_2)$ 为 y 方向上的第 q_2 个格子中的数据个数, N_{total} 为数据的总个数, $N(q_1, q_2)$ 为二维 xy 方向上的格子 (q_1, q_2) 中的数据个数。

互信息函数 $I(X_w, X_{w\tau})$ 的第一个极小值所对应的延迟时间 τ_w^* 即为第 w 个振动序列的最优时间延迟。

基于最优时间延迟值 τ_w^* , 计算出第 w 个振动序列的关联维数 $D_w(r, m_w)$ 。

$$D_w(r, m_w) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C_w(r, m_w)}{\ln r} \quad (9)$$

式中 $C_w(r, m_w)$ 为轴承第 w 个振动加速度序列的积累距离分布函数; m_w 为轴承第 w 个振动加速度序列的嵌入维数。

$$C_w(r, m_w) = \frac{2}{K(K-1)} \sum_{1 \leq k \leq \epsilon \leq K} \theta(r - r_{k\epsilon}(w)); r > 0 \quad (10)$$

式中 $r_{k\epsilon}(w)$ 为第 w 个振动序列相空间中两点之间的距离; $\theta(\cdot)$ 为 Heaviside 函数。

$$r_{k\epsilon}(w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m_w} [x_w(k + (i-1)\tau_w^*) - x_w(\epsilon + (i-1)\tau_w^*)]^2} \quad (11)$$

$$\theta(r - r_{k\epsilon}(w)) = \begin{cases} 0; & r < r_{k\epsilon}(w) \\ 1; & r \geq r_{k\epsilon}(w) \end{cases} \quad (12)$$

实际计算过程中,画出不同嵌入维数下积累距离分布函数 $C_w(r, m_w)$ 与距离 r 的对数关系曲线图。当 $m_w \geq m_w^*$ 时,曲线分布密集且趋于平行,此时对应的 m_w^* 即为所求的饱和嵌入维数,相应的 $m_w = m_w^*$ 曲线上直线部分的斜率就是所求的第 w 个振动序列的关联维数 $D_w(r, m_w)$, 简记为 D_w 。

1.1.2 计算盒维数

盒维数作为一种分形维数,能够表征轴承振动性能状态变化的规律和趋势,所以可以用它来表征滚动轴承服役过程中振动性能状态演变的非线性特征。

对于第 w 个振动序列 X_w , 选定任意盒子长度 ξ_w , 在 $X-\xi$ 坐标系中,过 X 轴每隔 ξ_w 个长度画出平行于坐标轴的网格线,计算第 w 个振动序列 X_w 曲线与网格线的交点个数 J_{w1} 。将盒子长度 ξ_w 放大 δ 倍($\delta = 2, 3, \dots, \varphi$, 且 $\varphi \xi_w \leq K$), 得到 X_w 曲线与网格线的交点个数 $J_{w2}, J_{w3}, \dots, J_{w\varphi}$ 。

$$\xi_{w\delta} = (\xi_w, 2\xi_w, \dots, \delta\xi_w, \dots, \varphi\xi_w) \quad (13)$$

$$J_{w\delta} = (J_{w1}, J_{w2}, \dots, J_{w\delta}, \dots, J_{w\varphi}) \quad (14)$$

对式(13)和式(14)两端同时取对数,在双对数坐标系中通过最小二乘法拟合法得到直线的斜率,即为所求的盒维数值。

实际计算过程中,将第 w 个振动序列 X_w 中的数据平展成边长为 K 的正方形二维平面,然后将正方形边长平均分成 ξ_w 份。对于第 w 个振动序列,分别以 $\ln \xi_w$ 为横坐标、以 $\ln J_w$ 为纵坐标,求解序列 X_w 的盒维数 B_{dw} 。

1.2 求解不确定性特征参数

在考察轴承振动性能演变过程中的不确定性时,为了避免单一方法和指标的局限性和片面性,使用2个不确定度指标从不同侧面进行研究和分析。2个不确定度指标分别为振动加速度序列的瞬时值波动范围(不确定度1)和平均值波动范围(不确定度2)。

1.2.1 振动加速度序列的瞬时值波动范围

给定一个置信水平 P ,求解轴承服役过程中 T 时刻的振动数据的估计区间 $[x_{T_1}, x_{T_u}]^{[22]}$ 。 T 时刻轴承振动数据估计真值的动态不确定度用 $U_0(T)$ 表示为

$$U_0(T) = x_{T_u} - x_{T_1} \quad (15)$$

在第 w 个轴承振动加速度序列对应的时间区间 $[T_{wmin}, T_{wmax}]$ 内,求解各个估计真值的动态不确定度,其构成一个向量,可以用 U_{0w} 表示为

$$U_{0w} = (U_{0w}(T_{wmin}), U_{0w}(T_{wmin} + 1), \dots, U_{0w}(T_{wmax})) \quad (16)$$

向量 U_{0w} 的估计区间可以用 $[U_{1min}(w), U_{1max}(w)]$ 表示。其中, $U_{1min}(w)$ 为向量 U_{0w} 中的最小值, $U_{1max}(w)$ 为向量 U_{0w} 中的最大值。

对于第 w 个轴承振动加速度序列 X_w 所对应的时段,计算振动加速度序列的瞬时值波动范围,它可以用不确定度1—— $U_1(w)$ 表示为

$$U_1(w) = \frac{1}{T_{wmax} - T_{wmin} + 1} \sum_{T_w = T_{wmin}}^{T_{wmax}} U_{0w}(T_w) \quad (17)$$

1.2.2 振动加速度序列的平均值波动范围

基于最大熵法,求解自助均值样本的概率密度函数。给定一个置信水平 P ,获取第 w 个轴承振动序列的自助均值样本的估计区间 $[v_{2l}(w), v_{2u}(w)]$ 。其中, $v_{2l}(w)$ 和 $v_{2u}(w)$ 分别为自助均值样本的下限值和上限值。

上限值 $v_{2u}(w)$ 和下限值 $v_{2l}(w)$ 需要满足:

$$\frac{1}{2}(1 - P) = \int_{v_{wmin}}^{v_{2l}(w)} f_w(v) dv \quad (18)$$

$$\frac{1}{2}(1 - P) = \int_{v_{wmax}}^{v_{2u}(w)} f_w(v) dv \quad (19)$$

式(18)和式(19)中, v_{wmax} 为自助均值样本中振动加速度数据的最大值; v_{wmin} 为自助均值样本中振动加速度数据的最小值。

计算振动加速度序列的平均值波动范围,用不确定度2—— $U_2(w)$ 表示为

$$U_2(w) = v_{2u}(w) - v_{2l}(w) \quad (20)$$

1.3 非线性特征参数和不确定性参数的灰关系分析

计算第 w 个振动序列 X_w 的关联维数 $D_w(r, m_w)$ 和盒维数 B_{dw} , W 个振动序列的关联维数和盒维数样本构成向量 D 和 B_d 。

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_w, \dots, D_W) \quad (21)$$

$$B_d = (B_{d1}, B_{d2}, \dots, B_{dw}, \dots, B_{dW}) \quad (22)$$

计算第 w 个振动序列 X_w 的振动瞬时值的波动范围(不确定度1) $U_1(w)$ 和振动平均值的波动范围(不确定度2) $U_2(w)$, W 个振动序列的不确定度1和不确定度2样本构成向量 U_1 和 U_2 。

$$U_1 = (U_1(1), U_1(2), \dots, U_1(w), \dots, U_1(W)) \quad (23)$$

$$U_2 = (U_2(1), U_2(2), \dots, U_2(w), \dots, U_2(W)) \quad (24)$$

为了叙述方便,以关联维数向量 D 和不确定度1向量 U_1 为例,对轴承振动性能的非线性特征参数和不确定性参数的灰关系进行分析。

1.3.1 归一化处理

对式(21)中的关联维数向量 D 和式(23)中的不确定度1向量 U_1 进行归一化处理。

$$D'_w = D_w - \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W D_w;$$

$$U'_1(w) = U_1(w) - \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W U_1(w) \quad (25)$$

$$D''_w = \frac{D'_w - D'_{wmin}}{D'_{wmax} - D'_{wmin}};$$

$$U''_1(w) = \frac{U'_1(w) - U'_{1min}(w)}{U'_{1max}(w) - U'_{1min}(w)} \quad (26)$$

生成的归一化数据序列 D_g 和 U_{1g} 分别为

$$D_g = (D''_1, D''_2, \dots, D''_w, \dots, D''_W) \quad (27)$$

$$U_{1g} = (U''_1(1), U''_1(2), \dots, U''_1(w), \dots, U''_1(W)) \quad (28)$$

1.3.2 计算归一化数据序列之间的属性权重

D_g 和 U_{1g} 之间的属性权重用 ω_{DU1} 表示为

$$\omega_{DU_i} = \begin{cases} 1 - d_{\max}/\eta; d_{\max} \in [0, \eta] \\ 0; d_{\max} \in [\eta, 1] \end{cases} \quad (29)$$

式中 $d_{\max}$ 为 D_g 和 U_{1g} 之间的最大灰差; $\omega_{DU_i} \in [0, 1]$; η 为 D_g 和 U_{1g} 之间的权重系数, $\eta \in [0, 1]$ 。当灰关系属性权重 ω_{DU_i} 取 0.5 时, 意味着轴承振动性能的关联维数序列和振动瞬时值的波动范围序列具有相同的属性^[23]。

D_g 和 U_{1g} 之间的灰差可以用 d_{DU_i} 表示为

$$d_{DU_i} = 1 - R(D_g, U_{1g}) \quad (30)$$

D_g 和 U_{1g} 之间的灰关联度可以表示为

$$R(D_g, U_{1g}) = \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W R(D_w'', U_1''(w)) \quad (31)$$

$$R(D_w'', U_1''(w)) = \frac{\gamma}{\gamma + \Delta r} \quad (32)$$

$$\Delta r = |D_w'' - U_1''(w)| \quad (33)$$

式中 Δr 为 D_w 和 $U_1(w)$ 之间的灰差异信息; γ 为分辨系数。对于 $\gamma \in (0, 1]$, 总存在唯一的 γ^* 使 d_{DU_i} 取得最大值, 此时的 γ^* 即为所求的最优分辨系数。

1.3.3 计算灰置信水平

序列 D 和 U_i 属性相同的可信度用灰置信水平 P_{DU_i} 来表征。 P_{DU_i} 取值越大, 则序列 D 和 U_i 之间的非线性相关程度越高; 反之, 则越低。

$$P_{DU_i} = (1 - 0.5\eta_{DU_i}) \times 100\% \quad (34)$$

式中权重系数 $\eta_{DU_i} \in [0, 0.5]$ 。

由式(29)可得

$$\eta_{DU_i} = \frac{d_{\max}}{1 - \omega_{DU_i}} \quad (35)$$

根据相关性理论, 滚动轴承振动性能的关联维数和振动瞬时值的波动范围序列的非线性相关程度通常被分为 5 个等级:

1) 如果 $80\% \leq P_{DU_i} \leq 100\%$, 那么便意味着轴承振动性能的关联维数和振动瞬时值的波动范围序列的非线性关联度非常高;

2) 如果 $60\% \leq P_{DU_i} < 80\%$, 那么便意味着轴承振动性能的关联维数和振动瞬时值的波动范围序列的非线性关联度较高;

3) 如果 $40\% \leq P_{DU_i} < 60\%$, 那么便意味着轴承振动性能的关联维数和振动瞬时值的波动范围序列的非线性关联度一般;

4) 如果 $20\% \leq P_{DU_i} < 40\%$, 那么便意味着轴承振动性能的关联维数和振动瞬时值的波动范围序列的非线性关联度较低;

5) 如果 $0 \leq P_{DU_i} < 20\%$, 那么便意味着轴承

振动性能的关联维数和振动瞬时值的波动范围序列的非线性关联度非常低。

同样地, 计算关联维数和振动平均值的波动范围序列、盒维数和振动瞬时值的波动范围序列、盒维数和振动平均值的波动范围序列之间的灰置信水平, 进而分析轴承振动性能的非线性特征和不确定性特征序列之间的非线性相关程度, 为更加正确有效地监测轴承振动性能状态变化提供新的思路。

2 试验研究

2.1 案例 1

在杭州轴承试验研究中心使用 ABLT-1A 型寿命强化试验机采集 P2 级角接触球轴承 7 008AC 全寿命周期内的振动加速度方均根值, 轴承型号为 7 008AC; 轴承的外径和内径分别为 68 mm 和 40 mm, 轴承的厚度为 15 mm; 额定动载荷为 18.9 kN; 极限转速为 28 000 r/min。使用的振动加速度传感器为 YD-1 型压电式传感器, 传感器的分辨率为 0.000 1 g、量程为 $\pm 2\ 000$ g。施加轴向载荷和径向载荷分别为 4.58 kN 和 4.17 kN; 转速为 6 000 r/min。当超过轴承振动幅值上界值 25 m/s^2 时, 试验自动终止。最终, 轴承外圈、内圈、钢球均剥落, 如图 1(a)~图 1(c) 所示。采集到轴承全寿命周期内的振动加速度数据, 如图 2 所示。

如图 2 所示, 该轴承全寿命周期内的振动性能状态演变过程具有明显的非线性与不确定性特征, 需要挖掘振动加速度数据蕴含的隐藏信息并对非线性与不确定性特征进行提取。

根据文献[15], 从该轴承的最佳性能阶段算起共有 7321 个振动加速度方均根数据, 将其划分为 10 段。其中, 第 473~7 672 个振动加速度方均根数据按 800 个数据划分为一段, 总共划分为 9 段; 第 7 673~7 793 个振动加速度方均根数据单独划分为一段, 记为第 10 段。

2.1.1 求解案例 1 试验数据的非线性特征参数

用关联维数和盒维数综合表征轴承运转过程中振动性能状态演变过程中的非线性特征。

基于互信息法, 分别计算各个振动序列对应时间段内的时间延迟, 结果如图 3 所示。

对应于图 3 中互信息的第一个极小值就是所求的最优时间延迟, 各个振动序列的最优时间延迟值如图 4 所示。

以第 1 振动序列为例, 基于 G-P 算法计算不

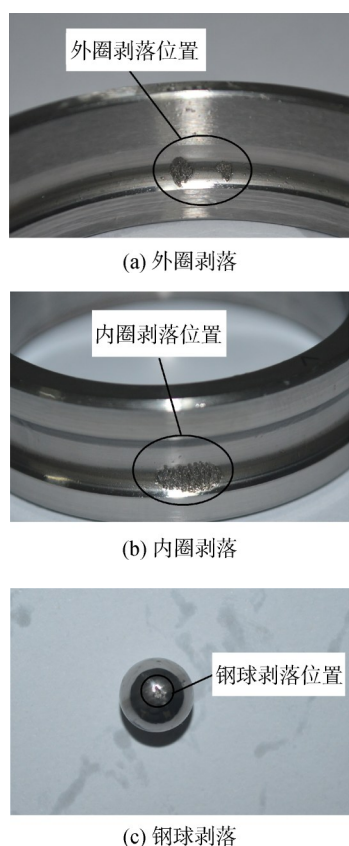


图1 轴承各部件剥落图

Fig.1 Spalling diagram of bearing components

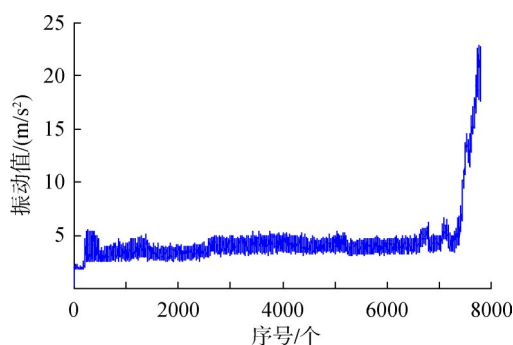


图2 轴承振动加速度数据样本(案例1)

Fig.2 Vibration acceleration data sample of bearings (Case 1)

同嵌入维数下积累距离分布函数 $C_1(r, m_1)$ 与距离 r 的对数关系曲线图,结果如图5所示。

由图5可知,当 $m_1 \geq 12$ 时曲线分布密集且趋于平行,那么该曲线上直线部分的斜率就是所求的关联维数值,通过回归分析法求得 $m_1=12$ 对应曲线上直线部分的斜率为 8.62,即 $D_1=D_1(r, m_1)=8.62$ 。同样地,画出各个振动序列积累距离分布函数 $C_1(r, m_1)$ 与距离 r 的对数关系曲线图,计算其他各个振动序列的关联维数值,结果如表1

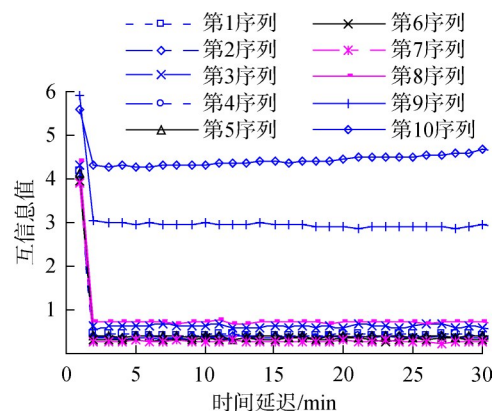


图3 各个振动序列的互信息值(案例1)

Fig.3 Mutual information values of each vibration sequence (Case 1)

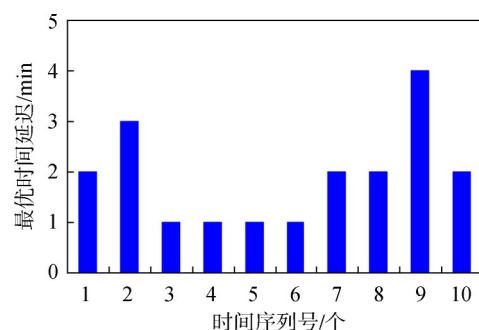
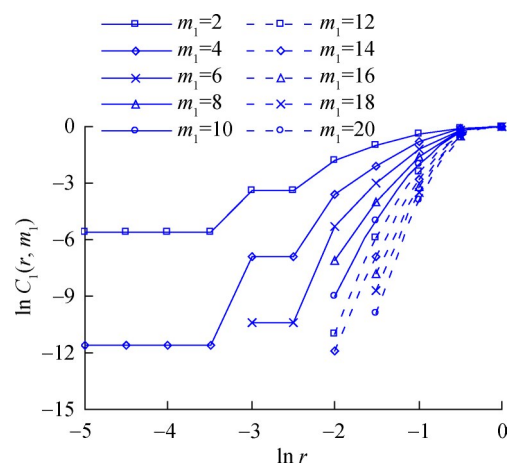


图4 各个振动序列的最优时间延迟值(案例1)

Fig.4 Optimal time delay values of each vibration sequence (Case 1)

图5 $\ln r - \ln C_1(r, m_1)$ 曲线图(案例1)Fig.5 Diagram of $\ln r - \ln C_1(r, m_1)$ (Case 1)

所示。

为了能够对全寿命周期内轴承振动序列关联维数的具体变化情况进行更加深入地研究,绘制其相应的柱形图,结果如图6所示。

由图6可知,轴承全寿命周期内除去第4振动序列所对应的时间段内,关联维数总体呈现逐渐

表 1 各个振动序列的性能参数(案例 1)

Table 1 Performance parameters of each vibration sequence (Case 1)

序列号 w	嵌入维数 m_w	关联维数 D_w
1	12	8.62
2	12	7.47
3	14	7.18
4	14	7.85
5	12	7.48
6	14	6.87
7	12	6.47
8	10	5.77
9	14	5.63
10	14	4.91

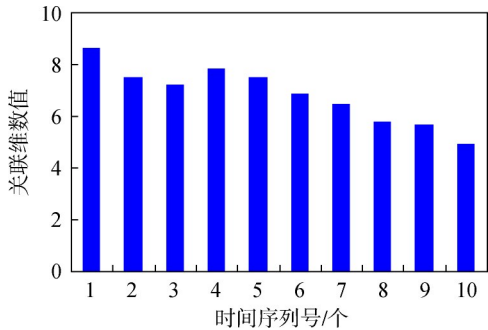


图 6 轴承全寿命周期内的关联维数(案例 1)

Fig.6 Correlation dimensions in the whole life cycle of bearings (Case 1)

减小的趋势,这可能是因为第 4 振动序列所对应的时间段内轴承接触方式、接触角发生变化而出现“自愈”现象。

以第 1 振动序列为例,画出其对应时间段内交点个数 J_1 与盒子长度 ξ_1 的对数关系曲线图,结果如图 7 所示。

同样地,画出其他各个振动序列的交点个数与盒子长度的对数关系曲线图,计算其他各个振动序列的盒维数,结果如表 2 所示。

为了能够对全寿命周期内轴承振动序列盒维数的具体变化情况进行更加深入地研究,绘制其相应的柱形图,结果如图 8 所示。

由图 8 可知,各个振动序列的盒维数总体呈现先减小后增加,之后再减小后增大的趋势,并伴有波动。在第 3 振动序列所对应的时间点之前,盒维数有减小的趋势;轴承运转至第 3 振动序列

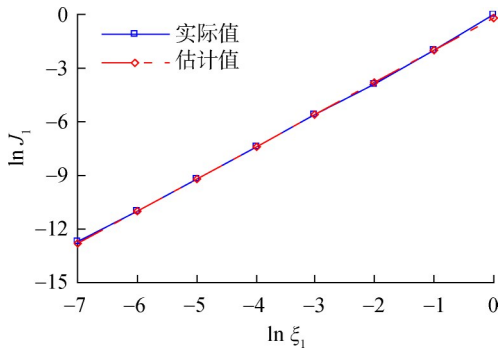


图 7 $\ln \xi_1$ - $\ln J_1$ 对数坐标曲线图(案例 1)

Fig.7 Diagram of $\ln \xi_1$ - $\ln J_1$ in logarithmic coordinates (Case 1)

表 2 各个振动序列的盒维数(案例 1)

Table 2 Box dimension of each vibration sequence (Case 1)

序列号 w	盒维数 B_{dw}	序列号 w	盒维数 B_{dw}
1	1.804 7	6	1.812 2
2	1.744 8	7	1.817 4
3	1.773 7	8	1.732 2
4	1.812 3	9	1.473 6
5	1.818 0	10	1.645 0

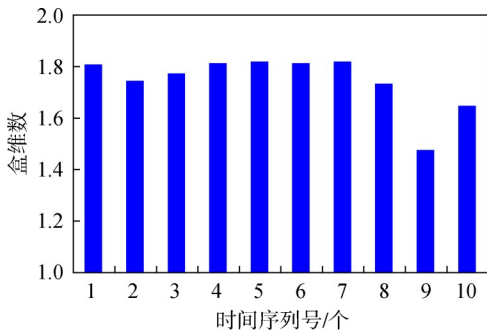


图 8 轴承全寿命周期内的盒维数(案例 1)

Fig.8 Box dimensions in the whole life cycle of bearings (Case 1)

至第 7 振动序列期间,盒维数变化不大;轴承运转至第 8 振动序列至第 9 振动序列期间,盒维数有减小的趋势;在第 10 振动序列所对应的时间段内,盒维数突然增大,这可能是由最后一个振动序列数据个数不足 800,数据分段不均造成的。

2.1.2 求解案例 1 试验数据的不确定性特征参数

轴承运转过程中振动性能状态演变过程中的不确定性特征用振动瞬时值的波动范围和平均值的波动范围 2 个参数综合表征。

以第 1 振动序列的原始数据 X_1 为例,再抽样

样本数 B_1 取为 10 000, 选定显著性水平为 0, 计算 T 时刻第 1 振动序列的下限值 x_{T1} 和上限值 x_{T0} 。计算第 1 振动序列瞬时值的波动范围, $U_1(1) = 2.5176 \text{ m/s}^2$ 。同样地, 求解其他各个振动序列瞬时值的波动范围, 并绘制相应的柱形图, 结果如图 9 所示。

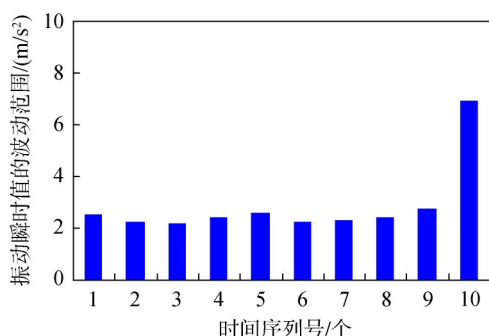


图 9 轴承全寿命周期内振动瞬时值的波动范围(案例 1)
Fig.9 Fluctuation range of vibration instantaneous values during the life cycle of the bearing (Case 1)

如图 9 所示, 振动序列瞬时值的波动范围(不确定度 1)整体上呈现先减小后增大, 之后又先减小后增大的趋势。在第 1~第 3 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 1 由 2.5176 减小至 2.1760; 在第 3~第 5 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 1 由 2.1760 增大至 2.5674; 在第 5~第 6 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 1 由 2.5674 减小至 2.2526; 在第 6~第 10 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 1 由 2.2526 增大至 6.8983。

显著性水平取为 0, 运用最大熵法计算第 1 振动序列样本均值的上限值 $v_{20}(1)$ 和下限值 $v_{21}(1)$ 。接着, 计算其平均值的波动范围 $U_2(1) = v_{20}(1) - v_{21}(1) = 1.2857 \text{ m/s}^2$ 。最后, 求解其他各个振动序列的平均值的波动范围, 结果如图 10 所示。

如图 10 所示, 振动序列平均值的波动范围(不确定度 2)整体上变化趋势复杂。在第 1~第 3 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 2 由 1.2857 增大至 1.6350; 在第 3~第 4 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 2 由 1.6350 减小至 1.2063; 在第 4~第 5 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 2 由 1.2063 增大至 1.4126; 在第 5~第 7 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 2 由 1.4126 减小至 1.1111; 在第 7~第 9 个振动序列对应的的时间段之间, 不确定度 2 由 1.1111 迅速增大至 10.2852; 在第 9~第 10 个振动序列对应的

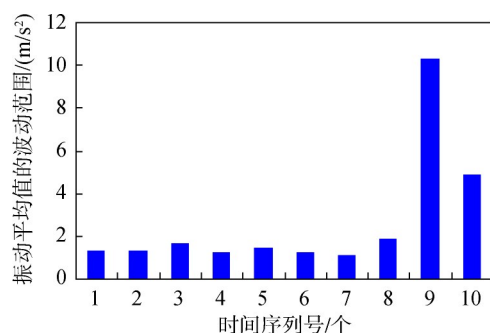


图 10 各个序列振动平均值的波动范围(案例 1)

Fig.10 Fluctuation range of vibration average values of each sequence (Case 1)

时间段之间, 不确定度 2 由 10.2852 减小至 4.8411。

综上所述, 在径向力 F_r 为 4.17 kN、轴向力 F_a 为 4.58 kN、转速为 6 000 r/min 条件下, 该滚动轴承全寿命周期内振动性能的非线性特征参数和不确定性特征参数随着服役时间的变化均呈现出非线性变化的趋势, 而且它们在突变点处有某种意义上的对应关系。非线性特征参数序列中关联维数和盒维数序列大体上有减小的趋势, 不确定性参数序列整体上呈现增大的趋势, 但也存在一定的波动。总体上来看, 非线性特征参数序列和不确定性特征参数序列有负相关关系。下面, 基于灰关系分析法, 进一步地分析各个特征参数序列之间的具体关系。

2.1.3 案例 1 试验数据的非线性特征参数和不确定性参数灰关系分析

以关联维数序列和瞬时值的波动范围序列为例, 首先进行均值归一化处理, 得到新的生成数据序列。基于灰关系分析法, 取 $\omega_{DU_1} = 0.50$; 计算 $P_{DU_1} = 84.95\%$ 。由灰置信水平 P_{DU_1} , 大于 80%。基于相关性理论, 该轴承服役过程中关联维数和不确定度 1 序列之间的非线性相关程度可以认为是非常高的。

同样地, 计算其他参数序列两两之间的灰置信水平, 结果如表 3 和图 11 所示。

表 3 各参数序列之间的灰置信水平(案例 1)
Table 3 Grey confidence levels between parameter sequences (Case 1)

非线性参数	灰置信水平/%	
	U_1	U_2
D	84.95	89.054
B_d	57.85	61.65

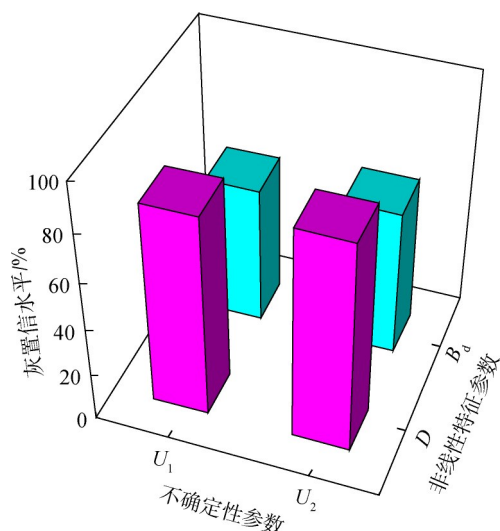


图11 非线性特征参数和不确定性特征参数序列之间的灰置信水平(案例1)

Fig.11 Grey confidence levels between nonlinear and uncertain characteristic parameter sequences (Case 1)

由表3与图11中计算结果可知, $80\% \leq P_{DU_1} = 84.95\% \leq 100\%$, $80\% \leq P_{DU_2} = 89.054\% \leq 100\%$, 基于相关性理论可以认为滚动轴承振动性能状态演变过程中的关联维数和不确定度1序列、关联维数和不确定度2序列的非线性相关程度均非常高。 $40\% \leq P_{B_d U_1} = 57.85\% < 60\%$, 可以认为盒维数和不确定度1序列的非线性相关程度一般; $60\% \leq P_{B_d U_2} = 61.65\% < 80\%$, 可以认为盒维数和不确定度2序列的非线性相关程度较高。

在与不确定性参数 U_1 和 U_2 的灰关系对比分析中, 关联维数均比盒维数的灰置信水平要高, 这是因为盒维数对数据波动不敏感, 全寿命周期内盒维数数值上均变化很小。在与非线性特征参数关联维数和盒维数的灰关系对比分析中, U_2 均比 U_1 的灰置信水平要高, 这是因为 U_1 和 U_2 分别是基于振动数据的瞬时值和平均值对整个振动序列对应时间段内的轴承振动性能的不确定性进行分析和评估, 即 U_1 对数据波动更敏感。

2.2 案例2

轴承振动加速度数据源于美国 Case Western Reserve University 的轴承数据中心网站, 如图12所示。

如图12所示, 不同磨损状态下各记录1600个振动加速度数据, 随着磨损直径的增大, 轴承振动性能平稳性越来越差。前1600个数据对应的时段内, 轴承振动性能平稳性较好, 记为第1振

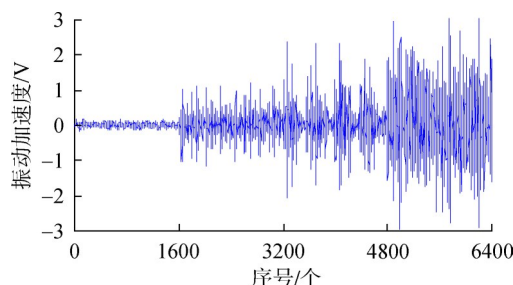


图12 轴承振动加速度数据样本(案例2)

Fig.12 Vibration acceleration data sample of bearings (Case 2)

动序列; 第1601~3200个数据, 记为第2振动序列; 第3201~4800个数据记为第3振动序列; 第4801~6400个数据记为第4振动序列。

2.2.1 求解案例2试验数据的非线性特征参数

用关联维数和盒维数综合表征滚动轴承全寿命周期内振动性能状态演变的非线性特征。

基于互信息法, 分别计算各个振动序列对应时间段内的时间延迟, 结果如图13所示。

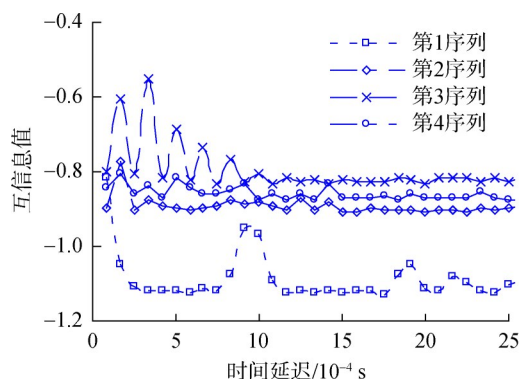


图13 各个振动序列的互信息值(案例2)

Fig.13 Mutual information values of each vibration sequence (Case 2)

对应于图13中互信息的第一个极小值就是所求的最优时间延迟, 各个振动序列的最优时间延迟值如图14所示。

以第1振动序列为例, 基于G-P算法计算不同嵌入维数下积累距离分布函数 $C_1(r, m_1)$ 与距离 r 的对数关系曲线图, 结果如图15所示。

由图15可知, 当 $m_1 \geq 14$ 时曲线分布密集且趋于平行, 那么该曲线上直线部分的斜率就是所求的关联维数值, 通过回归分析法求得 $m_1 = 14$ 对应曲线上直线部分的斜率为6.36, 即 $D_1 = D_1(r, m_1) = 6.36$ 。

同样地, 画出各个振动序列积累距离分布函

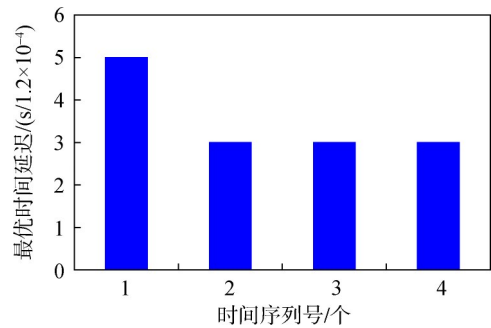


图 14 各个振动序列的最优时间延迟值(案例 2)
Fig.14 Optimal time delay values of each vibration sequence (Case 2)

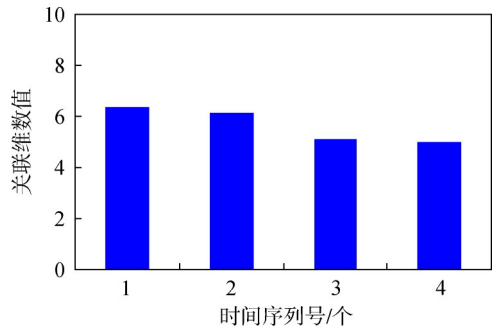


图 16 各个振动序列的关联维数(案例 2)
Fig.16 Correlation dimension of each vibration sequence (Case 2)

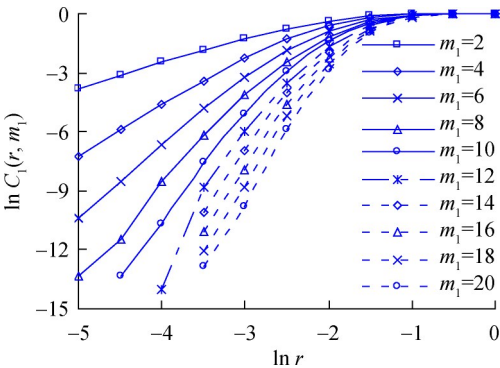


图 15 $\ln r - \ln C_1(r, m_1)$ 曲线图(案例 2)
Fig.15 Diagram of $\ln r - \ln C_1(r, m_1)$ (Case 2)

数 $C_w(r, m_w)$ 与距离 r 的对数关系曲线图 $\ln r - \ln C_w(r, m_w)$, 计算其他各个振动序列的关联维数值, 结果如表 4 所示。

表 4 各个振动序列的性能参数(案例 2)		
Table 4 Performance parameters of each vibration sequence (Case 2)		
序列号 w	嵌入维数 m_w	关联维数 D_w
1	14	6.36
2	14	6.13
3	24	5.07
4	14	4.99

为了能够对全寿命周期内轴承振动序列关联维数的具体变化情况进行更加深入地研究, 绘制其相应的柱形图, 结果如图 16 所示。

由图 16 可知, 随着磨损直径的增大, 关联维数总体呈现逐渐减小的趋势。其中, 由第 1 振动序列到第 2 振动序列, 关联维数变化不大; 由第 2 振动序列到第 3 振动序列, 关联维数从 6.13 减小到 5.07, 变化较大, 这是因为第 3 振动序列对应的

时间段内, 轴承振动性能已经进入加速退化阶段; 由第 3 振动序列到第 4 振动序列, 关联维数变化不大。

以第 1 振动序列为例, 画出其对应时间段内交点个数 J_1 与盒子长度 ξ_1 的对数关系曲线图, 结果如图 17 所示。

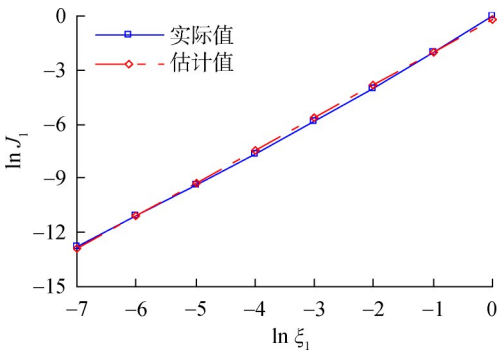


图 17 $\ln \xi_1 - \ln J_1$ 对数坐标曲线图(案例 2)
Fig.17 Diagram of $\ln \xi_1 - \ln J_1$ in logarithmic coordinates (Case 2)

同样地, 画出各个振动序列交点个数与盒子长度的对数关系曲线图, 进而计算各个振动序列对应时间段内的盒维数, 结果如表 5 所示。

表 5 各个振动序列的盒维数(案例 2)	
Table 5 Box dimension of each vibration sequence (Case 2)	
序列号 w	盒维数 B_{dw}
1	1.815 1
2	1.775 0
3	1.712 3
4	1.797 8

为了能够对全寿命周期内轴承振动序列盒维数的具体变化情况进行更加深入地研究,绘制其相应的柱形图,结果如图 18 所示。

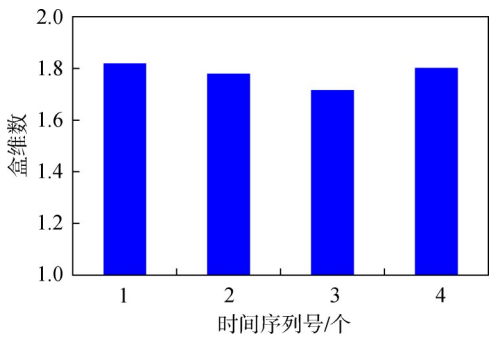


图 18 各个振动序列的盒维数(案例 2)
Fig.18 Box dimensions of each vibration sequence (Case 2)

由图 18 可知,各个振动序列对应时间段内的盒维数总体呈现先减小后增加的趋势。在第 3 振动序列所对应的时间点之前,盒维数有减小的趋势;在第 3 振动序列至第 4 振动序列所对应的时间段内,盒维数突然增大,这可能是因为轴承振动性能状态已进入加速退化阶段。

2.2.2 求解案例 2 试验数据的不确定性特征参数
轴承运转过程中振动性能状态演变过程中的不确定性特征用振动瞬时值的波动范围和平均值的波动范围 2 个参数综合表征。

以第 1 振动序列的原始数据 X_1 为例,再抽样样本数 B_1 取为 10 000,选定显著性水平为 0,计算 T 时刻第 1 振动序列的下限值 x_{T1} 和上限值 x_{T0} 。计算第 1 振动序列瞬时值的波动范围, $U_1(1)=0.268\ 7\ \text{m/s}^2$ 。同样地,求解其他各个振动序列瞬时值的波动范围,并绘制相应的柱形图,结果如图 19 所示。

如图 19 所示,振动序列瞬时值的波动范围

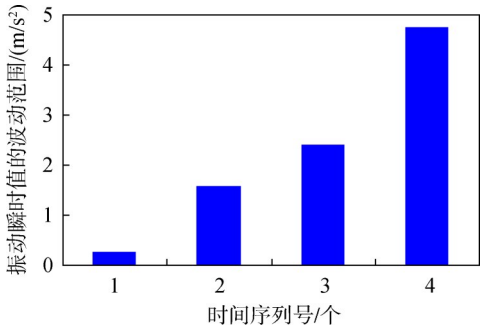


图 19 各个振动序列瞬时值的波动范围(案例 2)
Fig.19 Fluctuation range of instantaneous values of each vibration sequence (Case 2)

(不确定度 1)整体上呈现递增的趋势。
显著性水平取为 0,运用最大熵法计算第 1 振动序列样本均值的上限值 $v_{2u}(1)$ 和下限值 $v_{2l}(1)$ 。接着,计算其平均值的波动范围 $U_2(1)=v_{2u}(1)-v_{2l}(1)=0.025\ 0\ \text{m/s}^2$ 。最后,求解其他各个振动序列的平均值的波动范围,结果如图 20 所示。

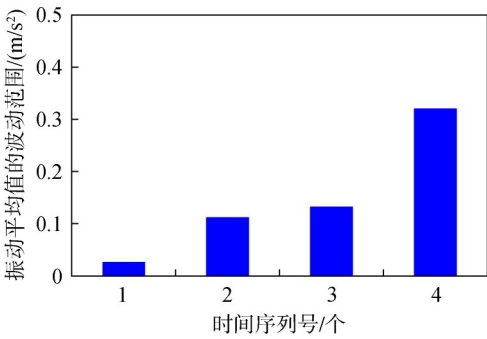


图 20 各个序列振动平均值的波动范围(案例 2)
Fig.20 Fluctuation range of vibration average values of each sequence (Case 2)

如图 20 所示,振动序列平均值的波动范围(不确定度 2)整体上呈现递增的规律。

综上所述,非线性特征参数序列和不确定性特征参数序列有负相关关系。下面将运用灰关系分析法,对各个特征参数序列之间的具体关系做进一步分析。

2.2.3 案例 2 试验数据的非线性特征参数和不确定性参数灰关系分析

以关联维数序列和瞬时值的波动范围序列为例,首先进行均值归一化处理,得到新的生成数据序列。基于灰关系分析法,取 $\omega_{DU_1}=0.50$;计算 $P_{DU_1}=94.44\%$,大于 80%。基于相关性理论,该轴承服役过程中关联维数和不确定度 1 序列之间的非线性相关程度可以认为是非常高的。

同样地,计算其他参数序列两两之间的灰置信水平,结果如表 6 和图 21 所示。

由表 6 和图 21 可知, $80\% \leq P_{DU_1}=94.44\% \leq 100\%$, $80\% \leq P_{DU_2}=93.35\% \leq 100\%$, $80\% \leq P_{B_dU_1}=$

表 6 各参数序列之间的灰置信水平(案例 2)		
Table 6 Grey confidence levels between parameter sequences (Case 2)		
非线性参数	灰置信水平 %	
	U_1	U_2
D	94.44	93.35
B_d	89.62	88.38

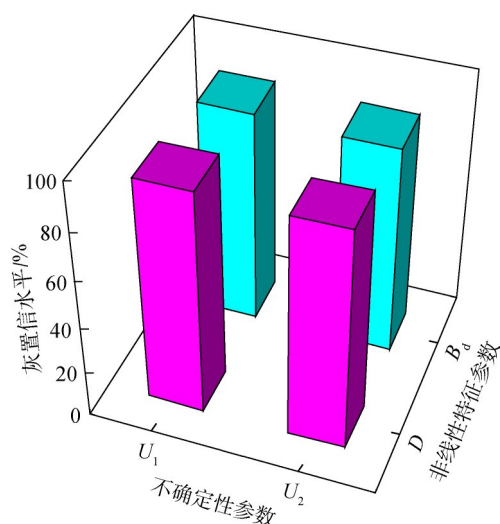


图 21 非线性特征参数和不确定性特征参数序列之间的灰置信水平(案例 2)

Fig.21 Grey confidence levels between nonlinear and uncertain characteristic parameter sequences (Case 2)

$89.62\% \leq 100\%$, $80\% \leq P_{B_d U_2} = 88.38\% \leq 100\%$, 基于相关性理论可以认为滚动轴承振动性能状态演变过程中的关联维数和不确定度 1 序列、关联维数和不确定度 2 序列、盒维数和不确定度 1 序列、盒维数和不确定度 2 序列的非线性相关程度均非常高。

在与不确定性参数 U_1 和 U_2 的灰关系对比分析中,关联维数均比盒维数的灰置信水平要高,这是因为盒维数对数据波动不敏感,随时间的变化盒维数数值变化很小。在与非线性特征参数关联维数和盒维数的灰关系对比分析中, U_1 均比 U_2 的灰置信水平要高。

3 结 论

1) 分别用关联维数和盒维数、振动瞬时值的波动范围和振动平均值的波动范围表征轴承运转过程中振动性能状态演变的非线性特征和不确定性特征,从而为研究轴承服役周期内的性能不确定性及其可靠性的非线性、非平稳和非统计的演变历程提供些许新思路。

2) 两个案例均表明滚动轴承振动性能的非线性特征参数和不确定性特征参数均随时间呈现非线性变化的趋势。关联维数和盒维数序列总体上有减小的趋势,不确定性参数序列 U_1 和 U_2 整体上有增大的趋势。

3) 在与不确定性参数的灰关系对比分析中,

两个案例均表明关联维数均比盒维数的灰置信水平要高,这意味着用关联维数表征轴承振动性能状态演变的非线性特征的效果比用盒维数好。

参考文献:

- [1] NATARAJ C, HARSHA S P. The effect of bearing cage run-out on the nonlinear dynamics of a rotating shaft[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(4):822-838.
- [2] WANG H C, CHEN J. Performance degradation assessment of rolling bearing based on bispectrum and support vector data description[J]. Journal of Vibration and Control, 2014, 13(20):2032-2041.
- [3] SINOUE J J. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(9):1713-1732.
- [4] 唐云冰,高德平,罗贵火.滚动轴承非线性轴承力及其对轴承系统振动特性的影响[J].航空动力学报,2006,21(2):366-373.
TANG Yunbing, GAO Deping, LUO Guihuo. Non-linear bearing force of the rolling ball bearing and its influence on vibration of bearing system[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(2):366-373. (in Chinese)
- [5] 涂文兵,何海斌,罗丫,等.基于滚动体打滑特征的滚动轴承振动特性研究[J].振动与冲击,2017,36(11):166-170.
TU Wenbing, HE Haibin, LUO Ya, et al. Vibration characteristics of rolling element bearings based on rolling elements' skidding feature[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(11):166-170. (in Chinese)
- [6] XIA X T, CHANG Z, LI Y F, et al. Analysis and prediction for time series on friction torque of rolling bearings[J]. Journal of Testing and Evaluation, 2018, 46(3):1022-1041.
- [7] 孟凡念,杜文辽,李浩.基于混沌理论的滚动轴承振动信号融合模型预测[J].航空动力学报,2020,35(8):1664-1675.
MENG Fannian, DU Wenliao, LI Hao. Fusion model prediction of rolling bearing vibration signal based on chaos theory[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(8):1664-1675. (in Chinese)
- [8] XIA X T, MENG F N. Grey relational analysis of measure for uncertainty of rolling bearing friction torque as time series[J]. Journal of Grey System, 2011, 23(2):135-144.
- [9] 徐永智,夏新涛,南翔.基于混沌理论滚动轴承振动稳健化试验数据的动态分析[J].航空动力学报,2015,30(8):1959-1965.
XU Yongzhi, XIA Xintao, NAN Xiang. Dynamic analysis of the robust test data on rolling bearing vibration based on chaos theory[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(8):1959-1965. (in Chinese)
- [10] 夏新涛,贾晨辉,王中宇.滚动轴承摩擦扭矩的非线性特征[J].农业机械学报,2009,40(4):202-205.
XIA Xintao, JIA Chenhui, WANG Zhongyu. Nonlinear characteristic of rolling element bearing friction torque[J]. Trans-

- actions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 4(40):202-205. (in Chinese)
- [11] 孟凡念. 滚动轴承摩擦力矩的试验数据分析[D]. 河南 洛阳: 河南科技大学, 2010.
- MENG fannian. Experimental data analysis of rolling bearing friction torque[D]. Luoyang Henan: Henan University of Science and Technology, 2010. (in Chinese)
- [12] 张淑清, 邢婷婷, 何红梅, 等. 基于VMD及广义分形维数矩阵的滚动轴承故障诊断[J]. 计量学报, 2017, 38(4):439-443.
- ZHANG Shuqing, XING Tingting, HE Hongmei, et al. Bearing fault diagnosis method based on VMD and generalized fractal dimension matrix[J]. Acta Metrologica Sinica, 2017, 38(4):439-443. (in Chinese)
- [13] 张美芸, 魏晖, 樊富起. 滚动轴承外圈失效的盒维数与信息维数特征[J]. 机械设计与制造, 2019(9):227-230.
- ZHANG Meiyun, WEI Hui, FAN Fuqi. Failure feature extraction based on box-counting dimension and information dimension of rolling bearing outer race[J]. Machinery Design & Manufacture, 2019(9):227-230. (in Chinese)
- [14] XIA X T, WANG Z Y. Grey relation between nonlinear characteristic and dynamic uncertainty of rolling bearing friction torque[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 22(2):244-249.
- [15] 叶亮, 夏新涛, 常振. 样本量对滚动轴承振动性能变异过程评估的影响[J]. 航空动力学报, 2019, 34(11):2490-2502.
- YE Liang, XIA Xintao, CHANG Zhen. Effect of sample size on evaluation of variation process of rolling bearing vibration performance[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(11):2490-2502. (in Chinese)
- [16] XIA X T, MENG Y Y, SHI B J, et al. Bootstrap forecasting method of uncertainty for rolling bearing vibration performance based on GM(1, 1)[J]. Journal of Grey System, 2015, 27(2):78-92.
- [17] CHEN Y S, YANG J L, XU Y H, et al. Status self-validation of sensor arrays using gray forecasting model and bootstrap method[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2016, 65(7):1626-1640.
- [18] LEMYRE F C, QUESSY J F. Multiplier bootstrap methods for conditional distributions[J]. Statistics & Computing, 2017, 27(3):805-821.
- [19] CHEN X W, DAI W. Maximum entropy principle for uncertain variables[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2011, 13(3):232-236.
- [20] PANDA S, MISHRA D, BISWAL B B, et al. Optimization of multiple response characteristics of EDM process using taguchi-based grey relational analysis and modified PSO[J]. Journal of Advanced Manufacturing Systems, 2015, 14(3):123-148.
- [21] KUMAR S S, UTHAYAKUMAR M, KUMARAN S T, et al. Parametric optimization of wire electrical discharge machining on aluminium based composites through grey relational analysis[J]. Journal of Manufacturing Processes, 2015, 20(1):33-39.
- [22] 叶亮, 夏新涛, 常振. 滚动轴承振动性能保持可靠性与不确定性关系的动态评估[J]. 航空动力学报, 2020, 35(11):2326-2338.
- YE Liang, XIA Xintao, CHANG Zhen. Dynamic evaluation of relationship between vibration performance maintaining reliability and uncertainty of rolling bearings[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(11):2326-2338. (in Chinese)
- [23] 叶亮, 夏新涛, 常振. 滚动轴承振动性能的混沌特性与不确定性之间的灰关系评估[J]. 机械传动, 2021, 45(1):9-16, 103.
- YE Liang, XIA Xintao, CHANG Zhen. Evaluation of grey relation between chaotic characteristic and uncertainty of rolling bearing vibration performance[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(1):9-16, 103. (in Chinese)

(编辑:张雪)